初中代数练习题 (By Yiyou Chen, Nov13, 2019. Email: gerry99@ucla.edu QQ: 1692085485)

1. 证明$a \le |a|$
2. 证明$a^2 = |a|^2$
3. 证明$|-a| = |a|$
4. 证明$\sqrt{a^2} = |a|$
5. 若$|a-b-c-d-4| + |b-c-d-3| + |c-d-2| + |d^2-1| = 0$, 求$a+b+c+d$.
6. 证明 $||a|-|b|| \le |a-b|$
7. 证明 $|a-b| \le |a|+|b|$ (6,7学名：三角不等式)
8. 证明 $|(x-1)^2 - |2x-x^2|| \le 1$
9. 求$|x| + |x-1| + |x-2| + ... + |x-2020|$ 的最小值即此时x的值或范围
10. 求$||x-1| - |x-2| + |x-3| - |x-4| + ... - |x-2020||$的最小值即此时$x$取值范围.
11. 证明任何 $0.x_1x_2x_3...\overline{x_k}$ 即一个任意长度k的以单循环结束的小数都可以写为一个分数$\frac{p}{q}$
12. 证明任何 $0.x_1x_2..(x_mx_{m+1}x_{m+2}...x_n)$ 即一个任意长度 n的以循环节$x_mx_{m+1}x_{m+2}...x_n$ 结束的小数都可以写为一个分数 $\frac{p}{q}$. 综合11,12, 证明任何有理数都可以写为 $\frac{p}{q}$, $(p,q$为整数且$q \neq 0)$ 的形式
13. 根据12的结论，可以证明 $\sqrt{2}$ 为无理数:
如果$\sqrt{2}$为有理数，那么$\sqrt{2}$可以写作$\frac{p}{q}$, p,q为正整数且$q \neq 0$, 即$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.若 $\sqrt{2}$能写为 分数那么一定能写成最简分数, 即p,q 互质。 两边同时平方得
$2 = \frac{p^2}{q^2} \to p^2 = 2q^2 \to p^2$为偶数. 若$p$为奇数，则$p^2$也是奇数。所以$p$只能是偶数. 所以
$p = 2k \to p^2 = 4k^2 = 2q^2 \to q^2 = 2k^2$. 同理得$q$为偶数. 即$p,q$ 同偶所以 $\frac{p}{q}$ 不是最简，矛盾。
所以 $\sqrt{2}$为无理数 .
用类似的方法，试证明 $\sqrt{3}$为无理数 .
14. 已知平方差公式可以通过如下方式推导:
$a^2 - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2 = a(a-b) + b(a-b) = (a+b)(a-b)$
试用类似方法推导立方差公式:
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
15. 证明立方差公式的右边 $(a-b)(a^2+ab+b^2) = 0$ 的唯一解为 $a = b$.
16. $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + ... + \frac{1}{2019\cdot2020} = ?$
17. $\frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + ... + \frac{1}{1+2+...+2020} = ?$
18. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + ... + \frac{1}{2018\cdot2019\cdot2020} = ?$
19. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5} + ... + \frac{1}{2017\cdot2018\cdot2019} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - ... - \frac{1}{2017} + \frac{1}{2018} = ?$
20. 证明 $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, 并说明等号成立条件. (学名：调和平均≤几何平均≤算术平均≤平方平均)
21. 若 $(3a-2b)x^2 + (a+b-c)x + 3 = c+2$, 求$a+b+c$.
22. 若 $x>-1$,求证 $\frac{-3x-2}{x+1} > -3$
23. 若 $x<-1$, 求证 $\frac{2x^2-3x-2}{x+1} < -7$ (不要求二次函数)
24. 是否存在一个函数：定义域为所有偶数，值域为所有奇数？并解释
25. 是否存在一个函数，定义域为所有整数，值域为所有正整数？并解释

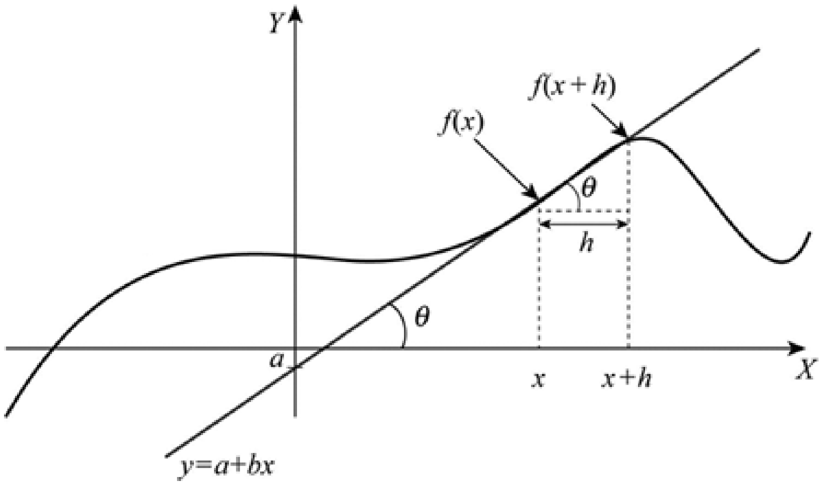
26. 是否存在一个函数，定义域为所有正整数，值域为所有整数？并解释
27. 证明所有一次函数只有一个零点(和x轴 有且只有一个交点). （第一步：找出一个零点. 第二步: 如果x_1, x_2 为2个不同零点，证明$x_1 = x_2$）
28. 求一次函数$y = ax + b$和两坐标轴构成的三角形面积（注意: a, b为任意实数且$a \neq 0$ ）
29. 求28中三角形的斜边长和斜边上的高长
30. 求$y = 2x - 1$, $y = 3x + 1$, $y = - x + 5$和两坐标轴构成的图形面积
31. 证明任何一次函数都可以写为$ax + by + c = 0$的形式. (第一步: 把$y = kx + m$转化为$ax + by + c = 0$的形式. 第二步:把$ax + by + c = 0$转化为$y = kx + m$的形式. 所以两种表示法等价)
32. 由31，若 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$和 $a_2x + b_2y + c_2 = 0$表示两个一次函数. 若两一次函数图像平行或重合，求a_1, b_1, a_2, b_2关系. 若两一次函数图像垂直，求a_1, b_1, a_2, b_2关系.
33. 若方程组$a_1x + b_1y + c_1 = 0$，$a_2x + b_2y + c_2 = 0$无解，求$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$需满足的条件. 若$a_1x + b_1y + c_1 = 0$，$a_2x + b_2y + c_2 = 0$有无穷多个解，求$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$需满足的条件.
34. 解三元一次方程组 $3x + 2y + z = 1$, $2x - y - z = 2$, $5x + 7y - 3z = - 3$
35. 定义一个函数y为增函数如果在定义域上函数值一直增加, 即对于任意定义域里的x_1, x_2，如果$x_1 < x_2$,那么$y_1 < y_2$（或$y_2 - y_1 > 0$）. 例: $y = 2x$为增函数，因为任取 $x_1 < x_2$，$y_2 - y_1 = 2x_2 - 2x_1 = 2(x_2 - x_1) > 0$. 同理, 定义一个函数$y$为减函数如果在定义域上函数值一直减小, 即对于任意定义域里的x_1, x_2， 如果$x_1 < x_2$,那么$y_1 > y_2$（或$y_1 - y_2 > 0$）.例: $y = - 2x$为减函数，因为任取 $x_1 < x_2$，$y_1 - y_2 = (-2x_1) - (-2x_2) = 2(x_2 - x_1) > 0$.
试证明：当$k > 0$时，一次函数$y = kx$为增函数. 当$k < 0$时，一次函数$y = kx$为减函数。
36. 证明: $y = \frac{2}{x}$在定义域上为减函数.
37. 证明: $y = 2x^2 + 3x + 1$在$x < - \frac{3}{4}$时 为减函数. 在$x > - \frac{3}{4}$时 为增函数.
38. 证明: $y = x^3$当$x < 0$时 为增函数,当$x > 0$时也为增函数. (使用立方差公式见14).
39. 因式分解: $2x^2 - xy - 3y^2 - y - x$
40. 求$\sqrt{x^2 + 25} + \sqrt{(x-5)^2 + 49}$的最小值
41. 现有反比例函数$y_1 = \frac{k}{x}(k > 0, x > 0)$和一次函数$y_2 = ax(a > 0)$交于点$A$, 过点$A$做垂线交x轴于$B$，求$\Delta OAB$面积.
42. 现有反比例函数$y_1 = \frac{k}{x}(k > 0)$和一次函数$y_2 = ax + b(a > 0)$交于点A和B. 求线段AB长度.
43. 若过题42中AB中点O做AB垂线与y_1有交点, 求k, a, b需满足的条件
44. 将一元二次方程$ax^2 + bx + c = 0$写成 $a(x + k)^2 = h$的形式
45. 若一元二次方程有实数根，求44中h, a, b, c需满足的条件. 将结果与判别式Δ比较
46. 证明若一元二次方程$ax^2 + bx + c = 0$有两根x_1, x_2. 证明 $x_1 + x_2 = - \frac{b}{a}$，$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$(学名:韦达定理)
47. 若x_1, x_2为$x^2 - 5x - 2 = 0$两根，求$x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$, $(x_1 + x_2)^2$, $|x_1 - x_2|$(两根距离)，$|{x_1}^3 - {x_2}^3|$, ${x_1}^3 + {x_2}^3$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, $|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}|$, $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$, $\frac{{x_2}^2}{{x_1}^2} + \frac{{x_1}^2}{{x_2}^2}$, $\frac{{x_2}^2}{x_1} + \frac{{x_1}^2}{x_2}$
48. 若$x^2 - xy + y = 1$的两根为x_1, x_2, 且$x_1y + x_2 = 0$有解, 求$x_1y - x_2$
49. 若$2x^2 + 7x - 3 = 0$, $3y^2 - 14y - 8 = 0$. 且$xy \neq 2$.求$\frac{2}{x} + y$.
50. 若$x^4 - 3x^3 + x^2 + 1 = 0$, 且$x \neq 1$. 求$(x-2)(x-1)(x+1)$

51. 已知$a^b = 4b, b^a = 9a,\ ab = 5$.求$4^a \cdot 9^b$
52. 求方程$3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} - 1 = 0$的所有实数根
53. 若某银行决定把每年10%的年利率调整为季度利率，但保证每年总利润相同.求季度利率应定为多少
54. 解不等式 $-x + 1 \geq \frac{-1}{x}$
55. 解不等式 $\frac{2}{x} > \frac{-3}{x+1} + 2$
56. 在一个边长为 a 的正方形内画一个边长为 b 的等边三角形(假设三角形完全在正方形里). 在正方形内随机选一个点，求点不在等边三角形内的概率
57. 现袋子里有5个红球，3个白球，2个黑球，随机拿3次每次一个球（拿完后放回），求总共拿到两次白球一次黑球的概率
58. 现袋子里有5个红球，3个白球，2个黑球，随机拿3次每次一个球（拿完后不放回），求袋中剩下没有黑球的概率.
59. 现有2个骰子，随机投掷后朝上的数分别为 a和b， 求 $3 \leq a + b \leq 7$ 的概率.
60. 现有2个骰子，随机投掷后朝上的数分别为 a和b，求 $a + b$ 最有可能的值即得到该值的概率(如有多个相同最大概率的值请写出全部)
61. 二次函数的一般式为 $y = ax^2 + bx + c$,由一般式推出顶点式,并由顶点式推出零点式.
62. 当 $a > 0$ 时, 谈谈二次函数的最值（最大值和最小值）以及增减性（x在什么范围内为增函数，什么范围内为减函数). 当 $a < 0$ 时, 谈谈二次函数的最值及增减性
63. 当二次函数$y_1 = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ 和一次函数$y_2 = mx + k(m \neq 0)$ 没有交点，有一个交点，有两个不相同交点时，分别说说 a, b, c, m, k 需满足的条件
64. 已知二次函数$y_1 = x^2 - 2x - 3$ 和一次函数$y_2 = 3x + C$ 有两个不相同交点，求两交点间距离和C 的关系
65. 若将二次函数$y = x^2 + bx + c$ 的图像向右平移2,向上平移3后顶点与原图像顶点关于(2,1)对称, 求 $b + c$
66. 已知二次函数$y = ax^2 - 5x + 6$. 已知存在x使得$y > 10$ ，求a 的取值范围
67. 当 a 的取值范围为 $\frac{1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$ 的定义域时, $ax^2 + 2ax > -2^c$ 恒成立,求c 的取值范围
68. 已知 $x^2 + bx + c$ 有 2 个不同的正数解, 求 b, c 需满足的条件(用图像思考)
69. (64加难)已知二次函数$y_1 = x^2 - 2x - 3$ 和一次函数$y_2 = 3x + c$ 有两个不相同交点A, B. y_1顶点为D. 求 ΔABD 面积(用 c 表示)
70. 已知关于x 的不等式 $3p < x < p^2 + 6$ 恰好有3个整数解. 求 p 的取值范围

拓展:

斜率衡量一个函数的增减快慢. 我们已经知道如何求一个一次函数的斜率.但是像二次函数或反比例函数这种非线性的函数其实也存在斜率,只是斜率在不停变化. 如果我们把在一个点的斜率定义为自变量很小变化时因变量的变化状态,那么在$x = x_0$ 时的斜率就是 $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$,其中x_1为 x_0 加上一个

很小的无限接近于0的值. ($f(x)$ 定义一个关于 x 的函数)



如果 $x_1 = x_0 + h$,那么在 x_0 时 该函数的斜率为 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ($\lim\limits_{h\to 0}$ 指 h 无限接近0的意思).如果我们定义斜率为一个关于 x 的新函数, $f'(x)$, 则 $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.由此我们可以得出一个连续方程在任何位置的斜率。那么我们求出斜率有什么用呢？斜率和增减性和最值有着紧密的关系. 比如当一个点的斜率为正时，这个函数在该点递增。反之当斜率为负时，在该点递减. 当斜率为0时，说明很有可能该点是个最值，因为从递增变到递减或从递减变到递增. 因此在数学上, 斜率又被称做导数，它像是在主导一个函数的特征. 而求一个函数的斜率函数又称做求导函数(简称求导). 下面就举两个运用导数(斜率)解决函数增减性和极值的问题:

a. 反比例函数 $f(x) = \frac{1}{x}$:

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)} =- \frac{1}{x^2}$($h$近似0)

由于 $x^2 > 0(x \neq 0)$, $-\frac{1}{x^2} < 0$, 斜率为负.所以不论 $x < 0$还是$x > 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$递减 .

b. 二次函数 $f(x) = x^2 + x + 2$:

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+(x+h)+2-(x^2+x+2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2+h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{(2x+h)h+h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2x+h+1)$

$= 2x + 1$.

所以 当$2x + 1 < 0$即$x < \frac{-1}{2}$,递减; 当$2x + 1 > 0$即$x > \frac{-1}{2}$时,递增; 当$2x + 1 = 0$即 $x = \frac{-1}{2}$时斜率由负变正， 函数由递减变为递增,有最小值. 对照之前的二次函数特征发现完全吻合.

选做题: 用导数证明$y = f(x) = x^3$在$x < 0$和$x > 0$时递增. 并解释为什么 $x = 0$时 并没有出现最值.

……完